Halka Teori Final Cevap Anahtarı (1)

1 - a) $x^2 = 0_R$ olsun. $x(xa+ax) = x^2a + xax$
$= xax$

$(xa+ax)x = xax + ax^2 = xax$ olup değişmeli

b) b nin tersi b^{-1} olsun. a, b ile değişmeli

olduğundan $a.b = ba$ dır.

$b^{-1}(ab) = b^{-1}(ba) \Rightarrow b^{-1}ab = a \Rightarrow$

~~$(ab)b^{-1} = (ba)b^{-1} \Rightarrow a = b$~~

$(b^{-1}ab)b^{-1} = ab^{-1} \Rightarrow \underline{b^{-1}a = ab^{-1}}$ bulunur.

2 - $(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli gruptur.

ikinci işlemin 1. işlem üzerine dağılma

özelliğine bakalım. $3,4,5 \in \mathbb{Z}$ için

$5 * (3+4) = 5 * 7 = 5.7 + 5 + 7 = 47$

$(5*3) + (5*4) = (5.3 + 5 + 3) + (5.4 + 5 + 4) = 52$

olup $5 * (3+4) \neq (5*3) + (5*4)$ olup halka

değildir.

3 - $\forall b \in B$ için $0_R . b = 0_R$ olup $0_R \in (A:B) \Rightarrow$

$(A:B) \neq \emptyset$ dir.

$\forall r,s \in (A:B) \Rightarrow \forall b \in B$ için $rb, sb \in A$ dır.

$(r-s)b = rb - sb \in A$ olup (A ideal)

$r - s \in (A:B)$ dir.

$\forall r \in R, \forall s \in (A:B)$ ise $\forall b \in B$ için $sb \in A$

$\Rightarrow r(sb) = (rs)b \in A$ olup $rs \in (A:B)$ dir.

R değişmeli olduğundan $sr \in (A:B)$ olup

idealdir.

4- $f(x) = x^2 + x + \bar{1}$ olsun. Önce $\mathbb{Z}_2[x]$'de polinom asal mıdır? Değilse lineer çarpan (1. dereceden) içerir. O halde varsa $\mathbb{Z}_2$'de kökü olmalı, $f(\bar{0}) \neq \bar{0}$, $f(\bar{1}) \neq \bar{0}$ olup polinom $\mathbb{Z}_2[x]$ asaldır.

$\mathbb{Z}_2$ cisim olduğundan $\mathbb{Z}_2[x]$ Ö.B $\Rightarrow$ TİB olup TİB'de asal elemanlar asal ideal üretir. Ayrıca TİB'de asal idealler ile maksimal idealler çakışır. O halde $(f(x))$ ideali asal ve maksimal idealdir.

5- $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \cong \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ olsun.

$f: \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ 1-1 ve örten bir halka homomorfizması vardır.

üstelik $f(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = n$ dir. ($f(1) = 1$) O halde $5 = (0 + \sqrt{5})^2$

$f(5) = f((\sqrt{5})^2) = f(\sqrt{5})^2 \Rightarrow 5 = f(\sqrt{5})^2$

$f(\sqrt{5}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ olduğundan $f(\sqrt{5}) = a + b\sqrt{7}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$

$5 = (a + b\sqrt{7})^2 \Rightarrow 5 = a^2 + 7b^2 + 2ab\sqrt{7}$

$a.b = 0 \Rightarrow 5 = a^2 + 7b^2$ olup $a, b \notin \mathbb{Z}$ dir.

$a.b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{7} = \dfrac{5 - a^2 - 7b^2}{2ab}$ olup çelişki

o halde izomorf olamazlar